

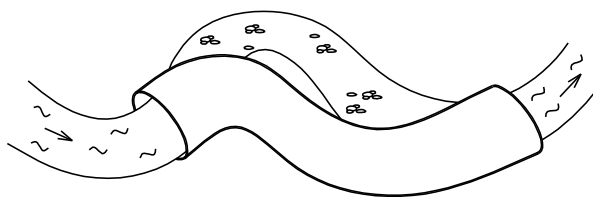
DYNAMICAL MODEL OF A FLEXIBLE TUBE

P. Frantík¹, M. Vořechovský²

Summary: *The paper presents two numerical models applied to a dynamic problem of interaction between fluid and a tube made of a flexible material. In particular, we model a foil tube filled with water. The motivation is to analyse behavior of the tube depending on the inner water pressure. This kind of structure has previously been proposed in river engineering to serve as a mobile weir, cofferdam, line flood protection etc. The model proved itself to be simple and fast and therefore suitable for such class of problems.*

1. Úvod

Manipulace s povrchovou vodou patří ve stavebnictví (a nejen v něm) k finančně i technicky náročným pracím. Je-li zapotřebí změnit či usměrnit tok řeky, popřípadě vytvořit v řečišti jímku, používají se často štetové stěny, které se beraní do podloží. Jako protipovodňová ochrana se používají zemní valy, různé typy mobilních zábran a v kritických situacích se staví stěna z pytlů s pískem.



Obrázek 1: Ilustrace převádění vody trubkou z fólie

Pro tyto a další účely byl navržen systém pro převádění stavební vody, viz [Vořechovský 1980]. Systém se skládá z fólie uzavřené do tvaru trubky, která je plněna pod tlakem vodou. Voda se do trubky přivádí buď samospádem z řečiště (z vyvýšeného místa), nebo je do ní vháněna čerpadly. Výstupní otvor trubky je proveden tak, aby byl za daných podmínek udržován ve válci potřebný

¹ Ing. Petr Frantík, Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, e-mail: kitnarf@centrum.cz

² Ing. Miroslav Vořechovský, Ph.D., Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně, Veveří 331/95, 602 00 Brno, e-mail: vorechovsky.m@fce.vutbr.cz

tlak. Profil trubky lze přizpůsobovat délkou obvodu a tlakem vody. Je zřejmé, že tento systém má mnoho předností: je levný a ekologický, snadno se převáží, instaluje a upravuje. Hodí se pro různé podmínky. Lze jej použít pro převádění vody, jímkování, jako pasivní i aktivní liniovou ochranu před povodněmi, jako přenosný jez. Obtíže při užití tohoto systému jsou následující:

- neurčitost tvaru trubky po naplnění pod daným tlakem,
- fixace polohy trubky a zamezení podtečení,
- stanovení chování trubky při bočním tlaku vody,
- regulace tlaku a škrcení výtokového otvoru,
- stav napjatosti ve fólii.

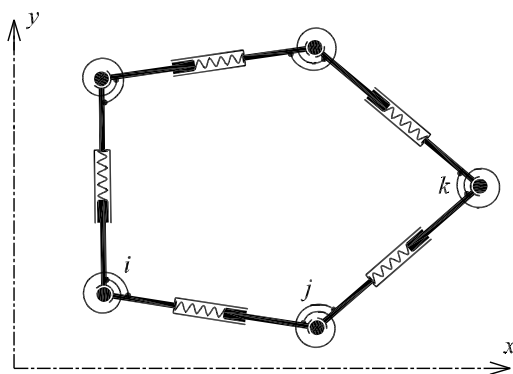
Tento příspěvek se věnuje modelování profilu trubky pro určení závislosti jejího tvaru a dalších vlastností na vnitřním tlaku vody. Mezi důležité vlastnosti profilu patří jeho výška, množství vody, délka kontaktu s podložím a kontaktní napětí. Cílem je také ukázat alternativní metody k metodě konečných prvků (MKP). Formulace úlohy v MKP by byla pravděpodobně komplikovaná a řešení by bylo časově náročné.

2. Modelování

Profil trubky byl modelován pro zjištění uvedených vlastností jako rovinná úloha (příčný řez válcové plochy trubky). Řešení je provedeno pomocí dvou metod založených na fyzikální diskretizaci hypotetického kontinua. První metoda uvažuje fólii jako velmi štíhlý prut, viz [Frantík 2004, Frantík 2005] a druhá metoda modeluje fólii jako řetězec „pseudočástic“.

Teleskopické dílce

První model fólie, založený na analogii s pružným štíhlým prutem, ji nahrazuje zvoleným počtem „teleskopických dílců“, které se pružně prodlužují a jsou vzájemně propojeny klouby s rotačními pružinami, viz obr. 2. Podloží je modelováno jako Winklerův podklad (lineární kontakt, bez smyku, bez tření) a voda je zde reprezentována pouze tlakem na dílce.



Obrázek 2: Schéma modelu trubky z teleskopických dílců

Liniové pružiny v dílcích i rotační pružiny na kloubech jsou uvažovány jako lineární. Tedy jejich napjatost je lineárně závislá na jejich deformaci:

$$F_l = k_l dl, \quad M_f = k_f d\varphi, \quad (1)$$

kde F_l je síla, kterou liniová pružina působí na spojovací klouby, k_l je tuhost liniové pružiny, dl je protažení liniové pružiny; M_f je moment, kterým rotační pružina působí na připojené dílce, k_f je tuhost rotační pružiny a $d\varphi$ je natočení dílců v místě připojení pružiny. Pro přetvoření liniové pružiny dl_{ij} spojující klouby i a j je užít geometricky přesný popis:

$$dl_{ij} = l_{ij} - l_{ij}^0, \quad l_{ij} = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}, \quad (2)$$

kde x_i, y_i jsou aktuální souřadnice kloubů, l_{ij} je aktuální délka pružiny, původní délka nenapjaté pružiny je l_{ij}^0 . Podobně pro přetvoření rotační pružiny $d\varphi_{ijk}$ ležící na kloubu j a vázané na klouby i a k (viz obr. 2) lze psát geometricky přesně:

$$d\varphi_{ijk} = \varphi_{ijk} - \varphi_{ijk}^0, \quad \varphi_{ijk}^0 = \varphi_{jk} - \varphi_{ij}, \quad \sin \varphi_{ij} = \frac{y_j - y_i}{l_{ij}}, \quad (3)$$

kde φ_{ij} je aktuální natočení dílce, φ_{ijk} je aktuální úhel mezi dílci ij a jk a φ_{ijk}^0 je úhel nenapjaté rotační pružiny.

Voda je v modelu reprezentována pouze svým tlakem, který je prostřednictvím dílců přenášen na klouby. Dílec ij působí na kloub i silou F_{wij} , kolmou na dílec, pro kterou platí:

$$F_{wij} = \frac{l_{ij}}{6} \cdot \begin{cases} (2q_i + q_j) & \text{jestliže } q_i \geq 0 \vee q_j \geq 0, \\ (2q_i - 3q_j)q_i^2 / (q_i - q_j)^2 & \text{jestliže } q_i \geq 0 \vee q_j < 0, \\ q_j^3 / (q_i - q_j)^2 & \text{jestliže } q_i < 0 \vee q_j \geq 0, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases} \quad (4)$$

kde q_i je intenzita fiktivního tlaku vody nad kloubem i , pro který platí:

$$q_i = \rho g (y_w - y_i), \quad (5)$$

kde ρ je hustota vody, g je tíhové zrychlení a y_w je výška fiktivní vodní hladiny.

Podloží je modelováno kontaktním Winklerovým podkladem v úrovni $y = 0$. Kontakt je uvažován lineární s tuhostí k_c . Pro kontaktní sílu F_{ci} , působící svisle vzhůru na kloub i , platí:

$$F_{ci} = \begin{cases} -k_c y_i & \text{jestliže } y_i < 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (6)$$

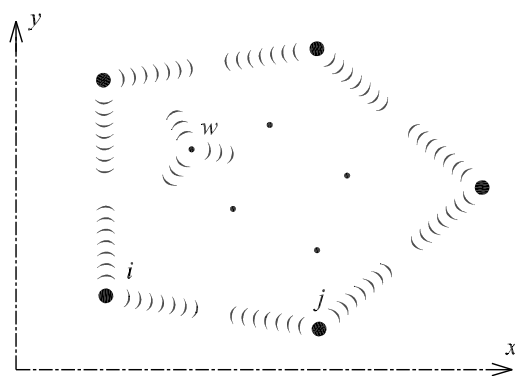
Jelikož je uvažováno soustředění hmoty fólie do kloubů, je stav modelu v čase t jednoznačně dán polohou a rychlostí všech těchto kloubů. Pohybové rovnice lze odvodit užitím např. Newtonovy klasické mechaniky ve tvaru:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= v_{xi}, & \frac{dv_{xi}}{dt} &= \frac{1}{m} (R_{xi} - c m v_{xi}), \\ \frac{dy_i}{dt} &= v_{yi}, & \frac{dv_{yi}}{dt} &= \frac{1}{m} (R_{yi} - c m v_{yi}), \end{aligned} \quad (7)$$

kde c je koeficient útlumu, m je hmotnost kloubu, v_{xi} , v_{yi} jsou složky rychlosti kloubu a R_{xi} , R_{yi} jsou složky výslednice interakční síly R_i , kterou dílce působí na kloub. Výslednice $R = f(F_l, M_f, F_w, F_c)$, viz vztah (1), je jediným nelineárním členem vyskytující se v pohybových rovnicích (7) díky nelinearitě vztahů (2), (3), (4) a (6). Pohybové rovnice (7) jsou řešeny numericky metodou Runge-Kutta.

Pseudočástice

Druhý model fólie, založený na analogii s působením atomů a molekul, ji nahrazuje zvoleným počtem „pseudočástic“, které jsou vzájemně propojeny pomocí lineární interakce, viz obr. 3. Tento model tedy, narozdíl od předchozího, neuvažuje ohybovou tuhost fólie. Podloží je modelováno rovněž jako Winklerův podklad (lineární kontakt, bez smyku, bez tření). Voda je zde reprezentována pseudočásticemi druhého druhu, které působí vzájemně na všechny pseudočástice obou druhů.



Obrázek 3: Schéma modelu trubky z pseudočástic

Částice reprezentující fólii působí na sousední částice fólie lineární interakcí. Jejich napjatostní funkce je tedy totožná s prvním ze vztahů (1) u předcházejícího modelu. Pseudočástice vody interagují se všemi ostatními pseudočásticemi. Interakční síla F_{rij} mezi částicí i a j je dána vztahem:

$$F_{rij} = \begin{cases} k_r (r_{ij} - r_{ij}^0) & \text{jestliže } r_{ij} < r_{ij}^0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases} \quad (8)$$

kde k_r je fiktivní tuhost interakce, r_{ij} je vzdálenost interagujících částic a r_{ij}^0 je vzdálenost, při které interakce vymizí.

Podloží je modelováno stejně jako u předchozího modelu, viz vztah (6).

Pohybové rovnice pseudočástic jsou totožné s pohybovými rovnicemi předchozího modelu (uplatňují se pro oba druhy pseudočástic). Jediný rozdíl spočívá v definici výslednice sil $R = f(F_l, F_r, F_c)$. Tyto pohybové rovnice jsou rovněž řešeny numericky metodou Runge-Kutta.

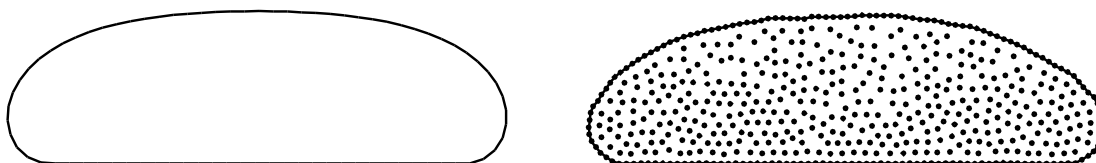
3. Výsledky simulací

Již v úvodu bylo řečeno, že mezi důležité vlastnosti profilu z ohebné fólie patří výška, množství vody, délka kontaktu s podložím a kontaktní napětí.

Vzhledem k faktu, že se jedná o kvalitativní studii chování fóliové trubky a s ohledem na zvolené vlastnosti fólie a podloží (tahově tuhá fólie a tuhé podloží), nezáleží příliš výsledky na konkrétních rozměrech a hodnotách parametrů. Proto nejsou tyto hodnoty specifikovány a výsledky jsou uvedeny v bezrozměrném tvaru vztaženém k nenapjaté fólii ve tvaru kružnice s obvodem O . Řídicím parametrem systému je ve všech případech výška fiktivní hladiny vody, tedy vnitřní tlak.

Srovnání modelů

Na obr. 4 je vidět porovnání ustáleného stavu obou modelů (ustálený stav pseudočásticového modelu není statický). Model vlevo je složen z 80 teleskopických dílců. Model vpravo obsahuje 160 pseudočástic fólie a 378 pseudočástic vody (22 částic při simulaci uniklo³). Pseudočásticový model fólie je hustší kvůli diskretizaci vodní masy.



Obrázek 4: Porovnání obou modelů: vlevo teleskopické dílce, vpravo pseudočástice

Ačkoliv jsou zde prezentovány dva modely, pro další studie byl použit model s teleskopickými dílci, zejména kvůli jeho lepší výstižnosti při nižších nárocích na trvání simulace. Užití pseudočásticového modelu se očekává v budoucnu při nutnosti modelování dynamiky kapaliny.

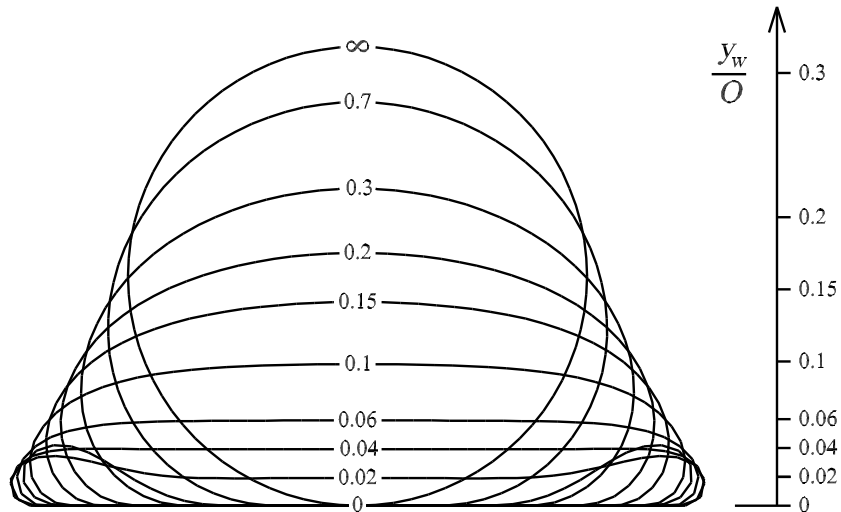
Vlastnosti profilu

Simulace úlohy s užitím teleskopického modelu byla prováděna následujícím způsobem: Vzhledem ke zvolené úrovni podloží se nad ním vytvořila trubka s minimální napjatostí ve tvaru kružnice. Fiktivní hladina vody byla nastavena pod úrovní podloží. Při započetí simulace došlo k pádu trubky na podloží a ustálení do tvaru blízkého zcela „splasklé“ trubce (odchýlenost úplného „splasknutí“ je dána velikostí ohybové tuhosti fólie). Hladina vody, jejíž zvyšování probíhalo lineárně, dosáhla úrovně podloží až po ustálení trubky po předcházejícím pádu v čase $t = 10$ sekund. Následoval nárůst tlaku vody v trubce a měření vybraných vlastností až do úrovně hladiny $0.7O$ dosažené v čase $t = 80$ sekund.

Na obrázku 5 je vidět vývoj ustáleného tvaru trubky pro různé úrovně fiktivní hladiny y_w (vnitřního tlaku vody). Při nízkých hladinách ($y_w \lesssim 0.04O$ v závislosti na ohybové tuhosti fólie) dochází k vytváření kapes nezaplněných vodou. Na stupnici vpravo jsou vyznačeny stavy fiktivní hladiny vody odpovídající zobrazeným tvarům. Limitním tvarem trubky je při nekonečně velkém vnitřním tlaku vody kružnice o obvodu O za předpokladu tahové nepoddajnosti fólie.

Na obrázcích 6 a 7 jsou vyneseny geometrické vlastnosti profilu. Jmenovitě výška trubky H a plocha průřezu A , opět v závislosti na úrovni hladiny y_w . Obě jsou vztaženy k výšce H_o

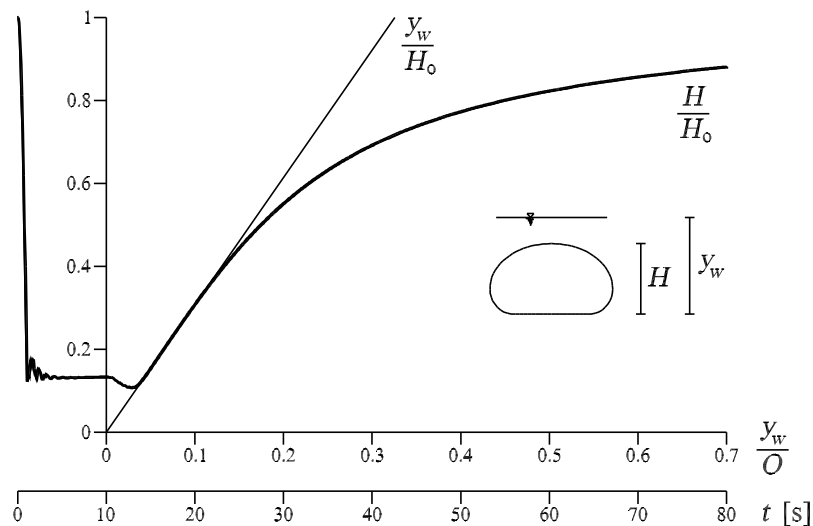
³ Jedinou bariérou v pseudočásticovém modelu je silová interakce. Pokud má částice vody dostatečnou kinetickou energii, může dojít k proražení řetězce částic fólie. Úniky částic souvisí s diskretizací systému.



Obrázek 5: Tvar trubky v závislosti na tlaku vody daném úrovní fiktivní hladiny y_w

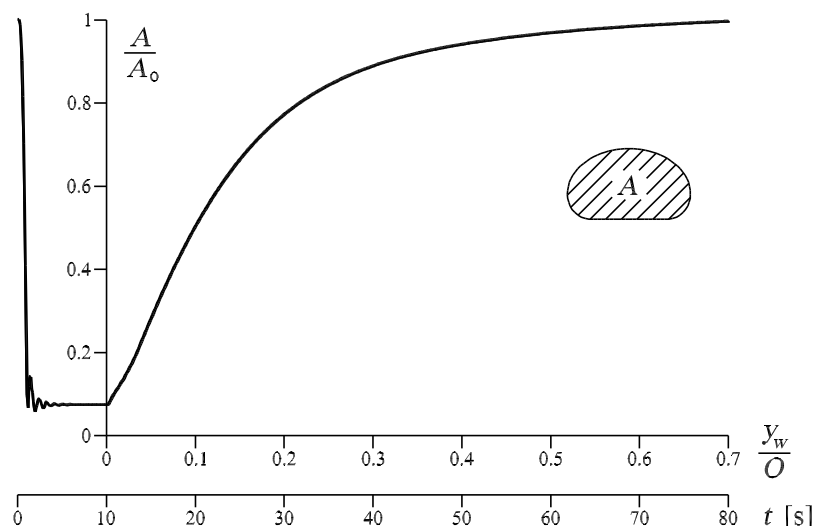
a ploše A_o limitní kružnice o obvodu O . Dodejme, že všechny uvedené grafy obsahují zároveň časovou osu pro zdůraznění způsobu řešení pomocí dynamické simulace. Časová osa rovněž umožňuje synchronně sledovat vývoj všech studovaných parametrů. Zopakujme, že počátečním stavem v čase $t = 0$ sekund byla nenapjatá fólie ve tvaru kružnice, která se v zápětí zhroutila (splaskla). V čase $t = 10$ sekund vymizely dynamické účinky pádu a mohlo dojít k postupnému zvyšování fiktivní hladiny vody (plnění trubky). Proto na obrázcích 6 a 7 počáteční výška resp. plocha odpovídá počátečnímu a zároveň limitnímu stavu – kružnici.

Poznamenejme, že výška profilu při naplňování nejprve poklesne (viz obrázek 6) což opět souvisí s ohybovou tuhostí fólie a výskytem oblastí nenaplněných vodou. Tyto oblasti jsou ovšem započteny do plochy průřezu A , viz obrázek 7.



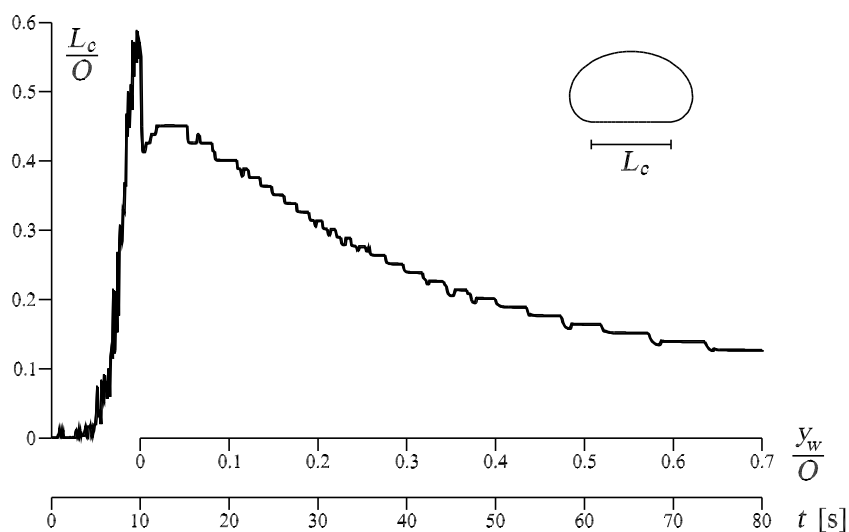
Obrázek 6: Výška trubky H v závislosti na tlaku vody daném úrovní fiktivní hladiny y_w

Obrázky 8 a 9 znázorňují veličiny související s kontaktem trubky a podloží. Na obrázku



Obrázek 7: Plocha průřezu trubky A v závislosti na tlaku vody daném úrovní fiktivní hladiny y_w

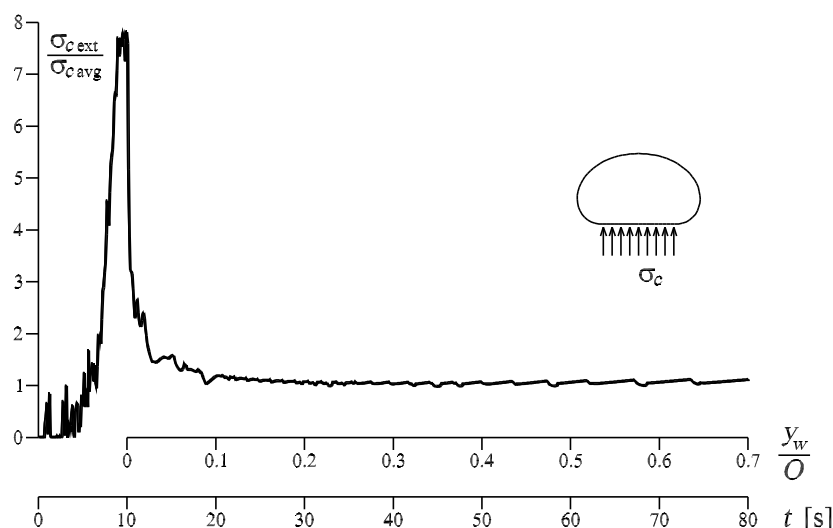
8 je vyneseno podíl obvodu trubky, který se dotýká podloží (odpovídá kontaktní délce L_c). Kontaktní délka je ve velmi citlivá na kmitání dílců, což se promítá do neustálenosti její hodnoty v čase $t = 0$ až 10 sekund. Náhlé snížení kontaktní délky v čase $t = 10$ sekund je způsobeno odpoutáním horního povrchu trubky od podloží⁴. Schodovitost v dalším průběhu souvisí s konečnou diskretizací fólie.



Obrázek 8: Délka kontaktu trubky s podložím L_c v závislosti na tlaku vody daném úrovní fiktivní hladiny y_w

Extrémní kontaktní napětí $\sigma_{c \text{ ext}}$ vztažené k průměrnému kontaktnímu napětí $\sigma_{c \text{ avg}} = F_c/L_c$, kde F_c je celková tíha trubky a vody, je zobrazeno na obrázku 9. Podstatné je, že záhy po počátku naplňování trubky vodou je kontaktní napětí rozloženo téměř rovnoměrně ($\sigma_{c \text{ ext}}/\sigma_{c \text{ avg}} \rightarrow 1$). Se vzrůstajícím tlakem vody se bude ovšem od této hodnoty mírně odchylovat.

⁴ Kontakt mezi elementy fólie nebyl řešen.



Obrázek 9: Extrémní kontaktní napětí trubky s podložím σ_c v závislosti na tlaku vody daném úrovní fiktivní hladiny y_w

4. Závěr

Článek se věnoval modelování trubky z ohebné fólie v kontaktu s kapalinou a s podložím. Motivací bylo popsání napětového a deformačního stavu trubky a její interakce s kapalinou a s podložím v průběhu plnění trubky vodou.

Úloha byla modelována pomocí dvou různých dynamických modelů, založených na fyzikální diskretizaci kontinua: teleskopických dílců a pseudočástic. Zvláště model z teleskopických dílců se ukázal jako výpočetně efektivní.

Další práce bude zaměřena na praktičtější aspekty užití trubky pro jímkování, převádění stavební vody, přenosné jezy a protipovodňové ochrany.

5. Poděkování

Tento výsledek byl získán za finančního příspěví MŠMT, projekt 1M6840770001, v rámci činnosti výzkumného centra CIDEAS. Při řešení byly částečně využity teoretické výsledky dosažené v projektu GA ČR 103/07/0760.

6. Literatura

[Frantík 2004] Frantík, P., 2004: Stability study of the elastic loop, *5th International PhD Symposium in Civil Engineering*, vol. 2, p. 1083-1088, Delft, Netherlands

[Frantík 2005] Frantík, P., 2005: Simulation of stability loss of von Mises truss in the state of unsymmetrical stress, CD sborník konference *Inženýrská mechanika 2005*, Svratka

[Vořechovský 1980] Vořechovský, M., 1980: *Převádění stavební vody* (směrnice pro návrh a využití), Tech. Rep. Povodí Moravy, Brno