

# FREQUENCY ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF THE BEAM IN POSTCRITICAL STATE

P. Frantík\*

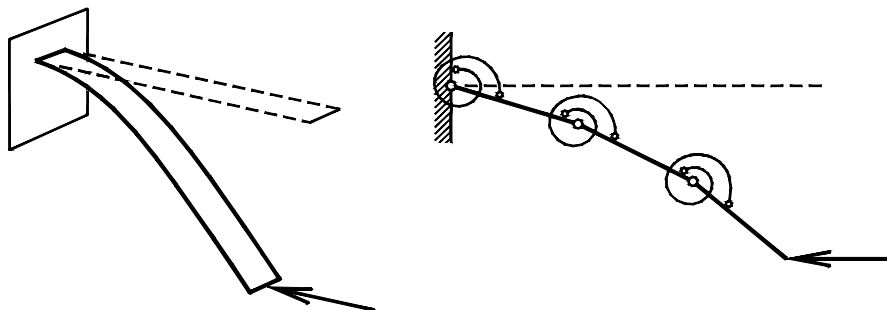
**Summary:** *Postcritical free vibrations of a slender elastic beam are studied. Cantilever beam is loaded by axial force and lateral deflections are observed. Effective numerical model of the beam is used and described. Vibration properties are investigated by Fourier frequency analysis.*

## 1. Úvod

Ideální štíhlý prut z pružného materiálu, zatížený ve vzpěru dostatečně velkým zatížením, může dosáhnout kritického stavu, který je již dlouho dobře znám. Překročí-li zatížení velikost nutnou pro tento kritický stav, dochází ke ztrátě stability přímého tvaru prutu při bifurkaci do jednoho ze dvou symetrických stabilních stavů (v rovinném případě). Tato úloha, i ve své statické podobě, je z hlediska výpočetní náročnosti poměrně složitá. Navíc je známo, že v okolí bifurkačního bodu se každý numerický model prutu chová do určité míry nestabilně. Hledání řešení takového prutu v pokritickém stavu dává zajímavé výsledky, jak je patrné například z publikace (Frantík 2004). Zde se věnujme vlastnostem volného kmitání prutu v pokritickém stavu se zaměřením na frekvenční analýzu pomocí Fourierovy transformace.

## 2. Model prutu

Pro výpočet kmitání štíhlého konzolového prutu byl vytvořen speciální model (viz Frantík & Macur, 2003), který umožňuje efektivní řešení zvolené úlohy. Je uvažován velmi štíhlý prut konstantního průřezu z lineárně pružného materiálu, což umožňuje zanedbat práci normálových i posouvajících sil na přetvoření prutu. Prut je ekvidistantně rozdělen na tuhé dílce spojené klouby s lineárními rotačními pružinami, viz obr. 1. Tento model lze dle (Henrych 1985) zařadit mezi finitní metody mechaniky jako zvláštní případ metody fyzických konečných prvků.



Obr. 1: Znázornění řešené konstrukce a jejího modelu

\* Ing. Petr Frantík: Ústav stavební mechaniky, Fakulta stavební, Vysoké učení technické v Brně; Veveří 95, 662 37 Brno; e-mail: kitnarf@centrum.cz

Konzervativní pohybové rovnice modelu (nejsou uvažovány tlumící jevy), odvozené v (Frantík & Macur 2003), lze zapsat v maticovém tvaru:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{d}{dt} \omega &= \mathbf{Q} \omega^2 - \mathbf{K} \varphi + \mathbf{f}, \\ \frac{d}{dt} \varphi &= \omega, \end{aligned} \quad (1)$$

kde  $\varphi$  je vektor pootočení dílců,  $\omega$  je vektor úhlových rychlostí dílců,  $\mathbf{M}$  je plná symetrická matice momentů setrvačnosti dílců,  $\mathbf{Q}$  je podobná antimetrická matice,  $\mathbf{K}$  je třídiagonální matice tuhosti,  $\mathbf{f}$  je vektor momentů zatěžující síly (působící na konci prutu ve směru jeho nepřetvořené osy) a  $t$  je čas. Matice momentů setrvačnosti  $\mathbf{M}$  má tvar:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{6} ml^2 \begin{bmatrix} 2(3(n-1)+1) & 3(2(n-2)+1) & 3(2(n-3)+1) & \cdots & 3 \\ & \cos(\varphi_2 - \varphi_1) & \cos(\varphi_3 - \varphi_1) & \cdots & \cos(\varphi_n - \varphi_1) \\ & & 2(3(n-2)+1) & 3(2(n-3)+1) & \cdots & 3 \\ & & & \cos(\varphi_3 - \varphi_2) & \cdots & \cos(\varphi_n - \varphi_2) \\ & & & & 2(3(n-3)+1) & \cdots & 3 \\ & & & & & \cdots & \cos(\varphi_n - \varphi_3) \\ & & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & & 2 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

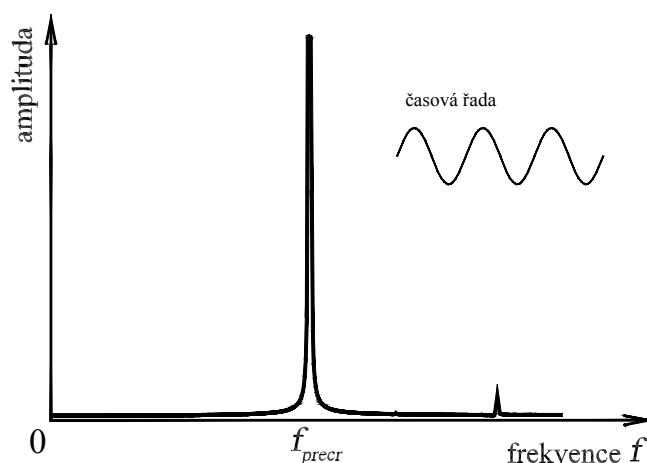
*symetrie*

kde  $\varphi_i$  je pootočení  $i$ -tého dílce, vzato vzestupně od dílce u vetknutí prutu,  $n$  je počet dílců,  $l$  je délka dílce a  $m$  je hmotnost dílce. Dále pro matici  $\mathbf{Q}$  platí:

$$\mathbf{Q} = \frac{3}{6} ml^2 \begin{bmatrix} 0 & (2(n-2)+1) & (2(n-3)+1) & \cdots & \sin(\varphi_n - \varphi_1) \\ & \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & \sin(\varphi_3 - \varphi_1) & \cdots & \sin(\varphi_n - \varphi_1) \\ -(2(n-2)+1) & 0 & (2(n-3)+1) & \cdots & \sin(\varphi_n - \varphi_2) \\ \sin(\varphi_2 - \varphi_1) & & \sin(\varphi_3 - \varphi_2) & \cdots & \sin(\varphi_n - \varphi_2) \\ -(2(n-3)+1) & -(2(n-3)+1) & 0 & \cdots & \sin(\varphi_n - \varphi_3) \\ \sin(\varphi_3 - \varphi_1) & \sin(\varphi_3 - \varphi_2) & & \cdots & \sin(\varphi_n - \varphi_3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\sin(\varphi_n - \varphi_1) & -\sin(\varphi_n - \varphi_2) & -\sin(\varphi_n - \varphi_3) & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Jestliže  $k$  je tuhost rotačních pružin, pro kterou platí  $k = EI/l$ , kde  $EI$  je ohybová tuhost prutu, pak pro matici tuhosti  $\mathbf{K}$  platí:





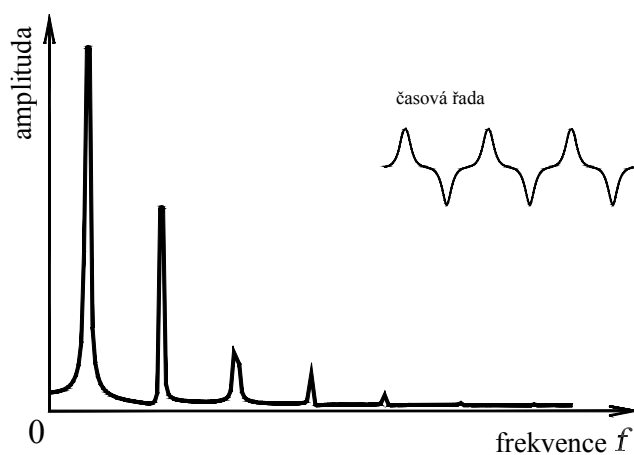
Obr. 2: Amplitudové spektrum volného kmitání prutu v prekritickém stavu

kde  $f_0$  je nejnižší frekvence volného kmitání nezátíženého prutu, pro kterou přibližně platí, dle (Brepta a kol. 1994):

$$f_0 = \frac{1.875^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{l_c^3 m_c}}, \quad (7)$$

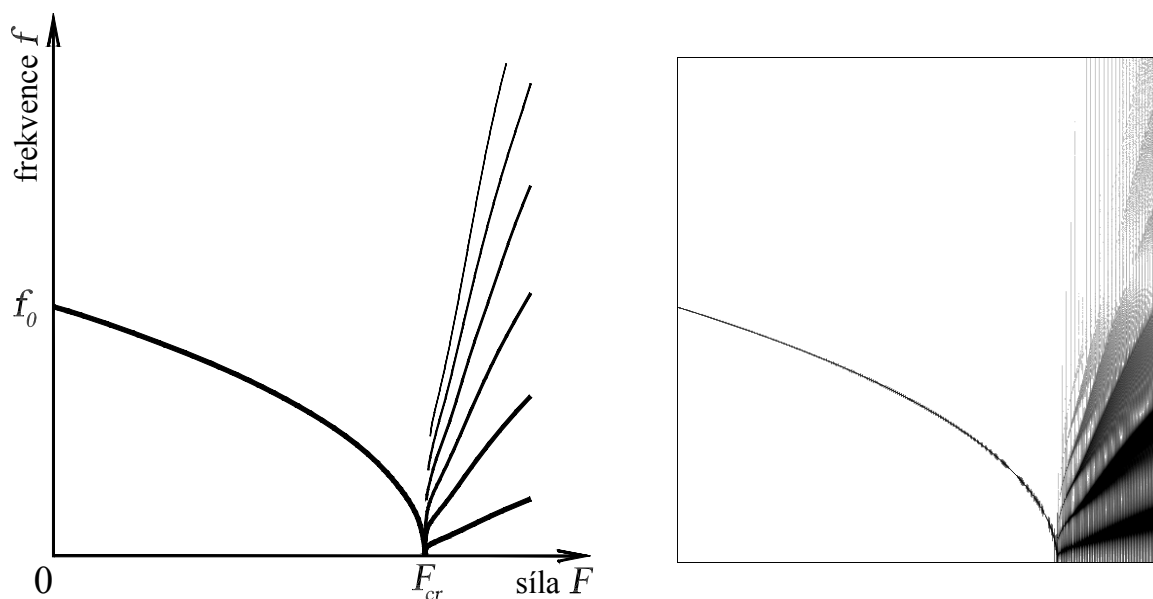
kde  $m_c$  je hmotnost prutu.

Pro sílu  $F$  větší než je kritická hodnota  $F_{cr}$  (pokritický stav) je výsledek Fourierovy transformace složitější, jelikož je úloha již výrazně nelineární a výsledná časová řada příčné výchylky nemá harmonický průběh (viz obr. 3).



Obr. 3: Amplitudové spektrum volného kmitání prutu v pokritickém stavu

Plošné zobrazení vývoje amplitudového spektra při změně velikosti síly  $F$  je vidět na obr. 4 včetně grafu vrcholů amplitud (velikost amplitudy je v plošném zobrazení dána odstínem šedé – čím tmavší, tím větší amplituda).



Obr. 4: Graf dominantních frekvencí (vrcholů amplitud Fourierovy transformace – vlevo) a původní výsledné amplitudové spektrum Fourierovy transformace časové řady příčné výchylky (vpravo) v plošném zobrazení.

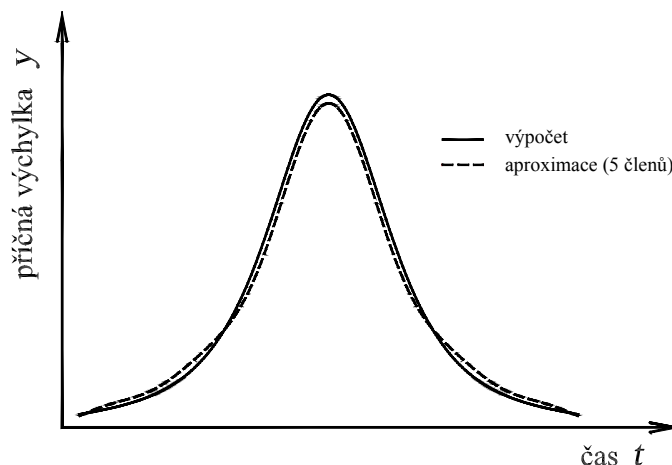
#### 4. Aproximace

Z podrobnější analýzy průběhu amplitudového spektra pokritického kmitání vyplývá, že vzájemný odstup sousedních dominantních frekvencí je přibližně konstantní, přičemž první dominantní frekvence je polovinou tohoto odstupu, dále amplitudy pro tyto dominantní frekvence přibližně exponenciálně klesají a fáze následující dominantní frekvence je vždy posunuta o  $\pi$  rad. Časovou řadu příčné výchylky tedy bude zřejmě možné aproximovat řadou:

$$y(t) = \sum_j a_j \sin(f_j \cdot t + \theta_j), \quad j = 1, 2, \dots, \quad (7)$$

$$f_j = f_1 + (j-1) \cdot \Delta f, \quad \Delta f = 2f_1, \quad a_j = a_0 \cdot e^{-\frac{c}{\Delta f} f_j}, \quad \theta_j = (j-1) \cdot \pi,$$

kde  $y$  je příčná výchylka koncového bodu prutu,  $f_1$  je první dominantní frekvence,  $a_0$  je charakteristická amplituda a  $c$  je koeficient strmosti poklesu amplitud. Tato řada může dát velmi dobré výsledky, jak je patrné ze srovnání vybrané časové řady při pokritickém kmitání a její aproximace na obrázku 5.



Obr. 5: Srovnání vypočtené a aproximované půlvlny příčné výchylky. Pro aproximaci bylo užito 5 členů řady

## 5. Závěr

V příspěvku byly ukázány zjištěné vlastnosti volného kmitání vetknutého prutu, který je v pokritickém stavu. Ukázalo se, že frekvenční spektrum příčné výchylky koncového bodu prutu má jedinečné vlastnosti (při zvolených počátečních podmínkách) a lze snadno aproximovat pomocí harmonické řady s exponenciálním poklesem amplitud.

Volné kmitání prutu v pokritickém stavu bylo řešeno s pomocí speciálního modelu, který byl v článku detailně popsán. Tento model se ukazuje být efektivní při rozsáhlých výpočtech silně nelineárních úloh tohoto druhu.

## Poděkování

Tento příspěvek byl vytvořen v rámci výzkumného záměru CEZ: J22/98: 261100009 a s podporou grantu GA ČR 103/03/1350.

## Literatura

- Brepta R., Půst L., Turek F. (1994), *Mechanické kmitání*, Technický průvodce 71, nakladatelství Sobotáles, Praha
- Frantík, P. (2004) Stability Study of the Elastic Loop, *5th International PhD Symposium in Civil Engineering*, TU Delft, Netherlands
- Frantík, P., Macur, J. (2003) Diskrétní dynamický model konzoly: Speciální řešení, *konference DYN-WIND*, TU Žilina, Tále
- Henrych J. (1985) *Úplná soustava finitních metod mechaniky a možnosti dalšího rozvoje*, studie ČSAV 6.85, nakladatelství Akademia, Praha